Barbara Ranghetti 2013

4 marzo 2013

STATISTICA

La fisica consiste nello studio di fenomeni a cu si vuole dare una descrizione quantitativa. In laboratorio quindi si ha:

- osservazioni (misure delle grandezze fisiche)
- relazioni tra le grandezze

Fase sperimentale

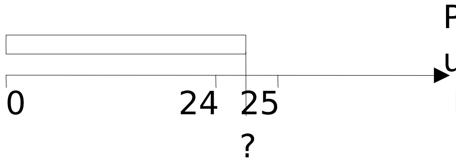
Formulazione di una legge:
- Deduzioni
- Previsioni

Verificare

La fase sperimentale quindi sta all'inizio, ma anche a livello di verifica finale.

Incertezze sperimentali

Qualunque misura fisica ha delle incertezze sperimentali, tuttavia devo saperle valutare per sapere se ho una buona misura.
Ex: misuro la lunghezza (L) di una corda



Posso usare uno strumento più preciso, ma oltre una certa sensibilità non posso andare.
Posso affermare che la misura L è compresa in un intervallo: 24<L<25, 24,1<L<24,7,…

L'incertezza è riducibile, ma mai eliminabile.

In generale, se $a < L < b$ allora $L = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2}$.

Tipi di misura e caratteristiche degli strumenti di misura

Misura
- Diretta = ottengo il risultato dal confronto diretto tra grandezza in esame e unità campione.
- Indiretta = ottengo il risultato come derivato di una serie di altre misure. (ex: la velocità si ottiene misurando lo spazio percorso e il tempo impiegato).

Gli strumenti di misura permettono di confrontare una grandezza con l'unità campione. A volte permettono di vedere direttamente il risultato, anche se compiono misure indirette; questo risultato comporta l'uso di:
- rivelatore
- trasduttore
- indicatore

Ex: sul termometro leggo la temperatura, in questo caso:
- rivelatore = mercurio che si dilata all'aumentare della temperatura.
- trasduttore = tubicino a sezione costante in cui la lunghezza della quantità di mercurio è proporzionale al suo volume.
- indicatore = scala graduata che fa corrispondere alla lunghezza della colonna di mercurio, la temperatura in gradi.

Gli strumenti di misura sono caratterizzati da:

Prontezza = tempo necessario perché lo strumento risponda in modo completo a una sollecitazione.

Intervallo d'uso =
- soglia = minimo valore della grandezza apprezzabile sullo strumento.
- portata = massimo valore misurabile (è importante non oltrepassarlo altrimenti si può rompere lo strumento).

Sensibilità = minima variazione della grandezza a cui lo strumento è sensibile.

Precisione = dispersione dei risultati di misure ripetute della stessa grandezza, cioè l'intervallo in cui sono contenuti i risultati delle misure di una stessa grandezza.

Quando faccio una misura posso avere errori di sensibilità o errori di precisione.
Gli errori possono essere casuali o sistematici.

Errori casuali = sono dovuti al concorrere di molte cause che rendono il risultato della singola misura diverso di volta in volta, ma compreso in un intervallo in cui le misure si distribuiscono. Si evidenziano ripetendo più volte le misure e si possono trattare con metodi statistici. Sono legati alla precisione dello strumento.

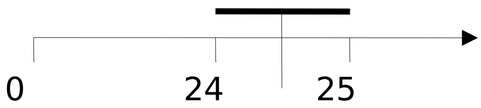
Accuratezza = capacità dello strumento di fornire valori vicini al vero valore della grandezza. Quando uno strumento non è accurato introduce errori sistematici, per cui il risultato è in eccesso o in difetto rispetto alla misura reale.

Errori sistematici = sono dovuti anche a una sola causa e sono legati all'accuratezza. Non si evidenziano ripetendo le misure, danno luogo a un risultato che ha una discrepanza rispetto al valore vero. Per eliminarli bisogna controllare gli

strumenti utilizzati e le modalità di utilizzo, confrontare lo strumento con altri, confrontare diversi metodi e procedure, controllare formule e approssimazioni.

Rappresentazione delle incertezze

- (miglior stima ± incertezza) unità di misura: (24,5 ± 0,5) cm
- intervallo: 24 cm < L < 25 cm
- sbarretta:



Ci sono tre modi per esprimere l’errore:

Errore assoluto: $\Delta L = 0{,}5cm$ (numero e unità di misura)

Errore relativo: $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{0{,}5cm}{24{,}5cm} = 0{,}2$ (numero puro)

Errore relativo percentuale: $\dfrac{\Delta L}{L} \times 100 = 2$ % (numero puro)

Anche se cambiamo le unità di misura, l’errore relativo e l’errore relativo percentuale rimangono invariati.

Cifre significative = numero di cifre a partire dalla prima cifra diversa da 0.

Ex: 225,3 4 cifre significative
0,025 2 cifre significative
340,0 4 cifre significative

L’incertezza di solito ha una o due cifre significative. Il risultato della misura va quindi dato in modo che l’ultima cifra significativa del risultato sia dello stesso ordine di grandezza dell’incertezza.

Ex: 225,3 ± 0,5
230 ± 50

Propagazione delle incertezze

Sia *z* una grandezza derivata dalla misura di altre grandezze *x* e *y*, ($z = f(x, y)$), e supponiamo di conoscere *Δx* e *Δy*. Quanto vale *Δz*?

Faccio una propagazione delle incertezze: calcolo il limite superiore di *Δz.*

$$\Delta z = \frac{z_{max} - z_{min}}{2}$$

1) $z = x + y$

$z_{\max} = x + \Delta x + y + \Delta y$, $z_{\min} = x - \Delta x + y - \Delta y$

$$\Delta z = \frac{x + \Delta x + y + \Delta y - x + \Delta x - y + \Delta y}{2} = \frac{2\Delta x + 2\Delta y}{2} = \Delta x + \Delta y \quad \Rightarrow \Delta z = \Delta x + \Delta y$$

2) $z = x - y$ $\Rightarrow$ $\Delta z = \Delta x + \Delta y$

3) $z = kx$ (k numero senza incertezze)

$z_{\max} = kx + k\Delta x$, $z_{\min} = kx - k\Delta x$

$$\Delta z = \frac{kx + k\Delta x - kx + k\Delta x}{2} = \frac{2k\Delta x}{2} = k\Delta x \quad \Rightarrow \Delta z = k\Delta x$$

in questo caso l'errore relativo vale: $\frac{\Delta z}{z} = \frac{k\Delta x}{kx} = \frac{\Delta x}{x}$, quindi se moltiplico per un numero la grandezza, l'errore relativo non cambia.

4) $z = xy$

$z_{\max} = (x + \Delta x)(y + \Delta y)$, $z_{\min} = (x - \Delta x)(y - \Delta y)$

$$\Delta z = \frac{xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - xy + x\Delta y + y\Delta x - \Delta x\Delta y}{2} = \frac{2x\Delta y + 2y\Delta x}{2} = x\Delta y + y\Delta x$$

$\Rightarrow$ $\Delta z = x\Delta y + y\Delta x$

In questo caso l'errore relativo vale: $\frac{x\Delta y + y\Delta x}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$.

5) $z = \frac{x}{y}$ $\Rightarrow$ $\Delta z = x\Delta y + y\Delta x$

Analisi statistica delle incertezze casuali

Faccio misure ripetute per valutare l'incertezza, come rappresento l'insieme dei risultati?

- estrarre valori significativi (valore centrale e dispersione)
- rappresentazione grafica (istogramma)

Esistono varie stime per studiare il valore centrale: sia data una grandezza *x* e N misure di tale grandezza $\{x_i\}_{i=1,N}$.

Media aritmetica: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

Moda: $\hat{x} =$ valore che si è presentato il maggior numero di volte (è collegata

alla frequenza).

Mediana: $\tilde{x}$ = punto di mezzo, cioè la misura che è nel mezzo della sequenza di risultati (ha un uguale numero di risultati a destra e a sinistra).

Stima di dispersione

Scarto: $d_i = x_i - \bar{x}$ Scarto medio: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N} = 0$

Scarto quadratico: $d_i^2 = (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N}$

Deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

6 marzo 2013

La deviazione standard è una grandezza omogenea: ha la stessa unità di misura della grandezza misurata a cui è associata.
Ci dà una stima della dispersione della misura, cioè l'intervallo che posso costruire prendendo $\bar{x} - \sigma_x, \bar{x} + \sigma_x$. In questo intervallo sono contenuti i $2/3$ dei valori di x_i, e verrà usato come indicatore della precisione della misura.

$$\sigma_x^2 = (\overline{x^2}) - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \right)^2$$

 proprietà della varianza.

Popolazione degli eventi = tutte le misure che posso fare $(N \to +\infty)$
Quando il numero N è piccolo, la formula della varianza finora utilizzata dà un risultato della varianza e della deviazione standard sottostimato.

Se N è finito e piccolo: $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N} \cdot \underbrace{\left(\frac{N}{N-1} \right)}_{}$

Correzione di Bessel

 $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$

Istogramma a sbarre

Supponiamo di avere M valori diversi tra loro, dopo aver fatto N misure, con M<N. Indicate le misure con $\{x_k\}_{k=1,M}$, definisco:

Frequenza assoluta: m_k = numero di volte che si è presentato x_k .

Frequenza relativa: $F_k = \frac{m_k}{N}$

Si ha sempre: $\sum_{k=1}^{M} m_k = N$ e $\sum_{k=1}^{M} F_k = 1$.

Si abbia per esempio {17,17,18,18,18,18,19,19,19,20}.

N=10 e M=4

x_k	17	18	19	20
m_k	2	4	3	1
F_k	0,2	0,4	0,3	0,1

m_k F_k

x_k x_k

Con i valori ripetuti le formule di media aritmetica e varianza diventano più compatte:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{M} m_k \times x_k}{N} = \sum_{k=1}^{M} F_k \times x_k$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{k=1}^{M} m_k (x_k - \bar{x})^2}{N} = \sum_{k=1}^{M} F_k (x_k - \bar{x})^2$$

C'è un terzo numero significativo che è importante osservare, perché dà informazioni sulla precisione della media ottenuta su N misure:

deviazione standard della media: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

n.b.: σ_x non dipende da N;

$\sigma_{\bar{x}}$ dipende da N: diminuisce all'aumentare di N.

- -

ELEMENTI DI TEORIA DELLA PROBABILITA'

Fenomeno casuale = fenomeno ripetibile, in teoria, infinite volte, che si

manifesta secondo diverse modalità, che sono singolarmente imprevedibili.

Insieme “S” = insieme di tutte le possibili modalità di verificarsi del tale fenomeno casuale. Possono essere in numero finito o infinito.

Evento casuale “E” = verificarsi di uno o più di queste modalità del verificarsi del fenomeno.
Ex: lancio un dado. L’evento casuale può essere:
- esce la faccia 6
- esce una faccia pari
- escono tutte le facce tranne la 1

Variabile casuale “x” = numero reale a cui posso associare ogni modalità di verificarsi del fenomeno.

Eventi mutuamente esclusivi = il verificarsi di un evento implica il non verificarsi dell’altro: sono eventi che non possono verificarsi insieme.

Evento complementare di “E” = non E, corrisponde al non verificarsi di E. E e $\bar{E}$ sono mutuamente esclusivi e si ha che $E+\bar{E}=S$.

Prodotto logico di E e F = $(E \cap F)$ o $(E \times F)$, è il verificarsi sia di E che di F.
Ex: ho un mazzo di carte,
E = estraggo una carta di fiori
F = estraggo un re
$E \times F$ = estraggo un re di fiori

Somma logica = $(E \cup F)$ o $(E+F)$, verificarsi di un evento, o dell’altro, o di entrambi.

La **definizione di probabilità** non è univoca:

1) definizione assiomatica di Kolmogorov: dati S e E, definisco la probabilità del verificarsi di E il numero associato univocamente a E, che soddisfa:
   I) $P(E) \geq 0$
   II) $P(S) = 1$
   III) dati $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tra loro mutuamente esclusivi, allora $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum P(E_k)$
2) definizione a priori, o classica, di Laplace:
   probabilità di un evento casuale = $\dfrac{\text{n° dei casi favorevoli al verificarsi}}{\text{n° dei casi possibili}}$
   $\Rightarrow P(E) \geq 0$

- P(S) = 1
- P(E) = 0 se E è impossibile
- P(E) = 1 se E è certo

3) definizione frequentista o a posteriori: se ho un evento casuale E, che si è verificato n volte su N prove, allora:

   $f(E) = \frac{n}{N}$ = frequenza relativa di E.

   $$P(E) = \lim_{N \to +\infty} f(E) = \lim_{N \to +\infty} \frac{n}{N}$$

   Questa definizione è basata sull'avere un evento ripetibile e sul fatto che le N prove possono essere fatte di seguito o in N repliche.

Legge dei grandi numeri (Teorema di Bernoulli)

Se prendo come definizione di probabilità quella assiomatica, posso dimostrare che, chiamato M il numero di prove:

$\forall \varepsilon, \delta > 0$ $\exists M$: $\forall N > M$ si ha che $P(|P(E) - P(F)| > \varepsilon) < \delta$

Legge della probabilità di Ē

Supponiamo di conoscere P(E), allora P(Ē) = 1 – P(E).
È più facile calcolare la probabilità che qualcosa non succeda.
Dimostrazione: supponiamo che E si verifichi n volte su N.

$$f(E) = \frac{n}{N} \Rightarrow f(\bar{E}) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N} = 1 - f(E)$$

$$P(\bar{E}) = \lim_{N \to +\infty} f(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Legge della probabilità totale

Siano E e F eventi e conosco P(E) e P(F). Mi chiedo cosa sia P(E+F).
Ho 4 casi possibili:

- $E \times F \rightarrow n_{11}$ - $E \times \bar{F} \rightarrow n_{12}$ - $\bar{E} \times F \rightarrow n_{21}$ - $\bar{E} \times \bar{F} \rightarrow n_{22}$

N = numero di prove.

- $f(E \times F) = \frac{n_{11}}{N}$ - $f(E \times \bar{F}) = \frac{n_{12}}{N}$ - $f(\bar{E} \times F) = \frac{n_{21}}{N}$ - $f(\bar{E} \times \bar{F}) = \frac{n_{22}}{N}$

$$f(E+F) = \frac{n_{11} + n_{21} + n_{12} + (n_{11} - n_{11})}{N} = \frac{n_{11} + n_{21}}{N} + \frac{n_{11} + n_{12}}{N} - \frac{n_{11}}{N} = f(E) + f(F) - f(E \times F)$$

$$\Rightarrow P(E+F) = P(E) + P(F) - P(E \times F)$$

Se E e F sono mutuamente esclusivi, allora $P(E \times F) = 0$.

Eventi statisticamente indipendenti = il verificarsi di E non dipende dal verificarsi di F e viceversa.

Probabilità condizionata P(E|F) = probabilità che si verifichi E essendosi verificato F. Se E e F sono statisticamente indipendenti P(E|F)=P(E) e P(F|E)=P(F).

probabilità composta

$$f(E|F) = \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{21}} \cdot \frac{N}{N} = \frac{n_{11}}{N} \cdot \frac{N}{n_{11}+n_{21}} = f(E \times F) \cdot \frac{1}{f(F)}$$

$$f(F|E) = \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{12}} \cdot \frac{N}{N} = \frac{n_{11}}{N} \cdot \frac{N}{n_{11}+n_{12}} = f(E \times F) \cdot \frac{1}{f(E)}$$

$$f(E \times F) = f(E|F) f(F) = f(F|E) f(E)$$

$$\downarrow \lim_{N \to +\infty}$$

$$P(E \times F) = P(E|F)P(F) = P(F|E)P(E)$$

Se E e F sono statisticamente indipendenti, allora P(E|F)=P(E) e P(F|E)=P(F), quindi si ha:

$$P(E \times F) = P(F) \times P(E)$$

Esempi:

1) quale è la probabilità di estrarre dal mazzo una carta che non sia un 4 (E) e che non sia di fiori (F)?

$$P(E) = \frac{1}{13}$$

$$P(F) = \frac{1}{4}$$

$$P(E \times F) = \frac{1}{52}$$

$$P = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{13} + \frac{1}{52} = \frac{9}{13}$$

2) ho due fotocelle, ciascuna delle quali ha una percentuale di funzionamento del 97%. Qual è la probabilità che il cancello resti chiuso se il segnale è dato congiuntamente dalle due fotocelle?

$$P(chiuso) = 1 - P(E) \times P(E) = 1 - (0{,}97)(0{,}97) = 0{,}06$$

Qual è la probabilità che rimanga chiuso se m basta che funzioni almeno una fotocella?

$$P(chiuso) = 1 - (P(E) + P(E)) = 1 - ((0{,}97) + (0{,}97)) = 0{,}01$$

Teorema di Bayes

Ho E e ho F_1 e F_2, i quali sono mutuamente esclusivi tra loro.

$$P(E \times F_1) = P(E \mid F_1)P(F_1)$$
$$P(E \times F_2) = P(E \mid F_2)P(F_2)$$
$$P(E) = P(E \times F_1) + P(E \times F_2) = P(E \mid F_1)P(F_1) + P(E \mid F_2)P(F_2)$$

Calcoliamo $P(E \mid F_1)$:

$$P(F_1 \mid E) = \frac{P(E \mid F_1)P(F_1)}{P(E)} = \frac{P(E \mid F_1)P(F_1)}{P(E \mid F_1)P(F_1) + P(E \mid F_2)P(F_2)}$$

Esempi:

1) lancio una moneta e esce testa per tre volte di seguito. So di avere in tasca due monete: una truccata, con due teste, e una giusta. Ne prendo una a caso. Qual è la probabilità che ho scelto quella giusta o quella truccata?

E= escono 3 teste di seguito

F_1= ho scelto la moneta truccata

F_2= ho scelto la moneta giusta

$P(E \mid F_1) = 1$, $P(F_1) = \frac{1}{2}$, $P(F_2) = \frac{1}{2}$, $P(E \mid F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$P(F_2 \mid E) = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$$

2) P(taxi blu)= 25% P(taxi verde)= 75%

C’è un incidente e il testimone afferma che sia coinvolto un taxi blu. La probabilità che il testimone dica il vero è del 70%.

È più probabile che il taxi sia verde o blu?

P(B)= 0,25 P(V)= 0,75 P(T|B)= 0,70 P(T|V)= 0,30

$$P(B \mid T) = \frac{P(T \mid B)P(B)}{P(T \mid B)P(B) + P(T \mid V)P(V)} = \frac{0{,}70 \times 0{,}25}{0{,}70 \times 0{,}25 + 0{,}30 \times 0{,}75} = 0{,}44$$

È più probabile che il taxi sia blu!

In generale, se ho $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eventi mutuamente esclusivi:

La frequenza di probabilità è utile per passare da un istogramma a una funzione continua. In questo modo ho la probabilità di osservare una misura a partire da numeri discreti.

Ho una grandezza x e $\{x_i\}_{i=1,N}$ misure. Se questi valori sono molti, allora li posso raggruppare in intervalli.
In questo modo ho M intervalli in cui raggruppo i risultati di x, di ampiezza Δk e valore centrale x_k.

m_k = numero di misure che cadono nell'intervallo k-esimo = frequenza assoluta

$F_k = \frac{m_k}{N}$ = frequenza relativa

L'area rosa è data da: $\sum_{k=1}^{M} F_k \Delta k$

<u>Densità di frequenza</u>: $f_k = \frac{F_k}{\Delta k}$ → se la metto in ordinata nell'istogramma ottengo un istogramma normalizzato, per cui:

area = $\sum_{k=1}^{M} \Delta k \cdot f_k = \sum_{k=1}^{M} \Delta k \cdot \frac{F_k}{\Delta k} = 1$

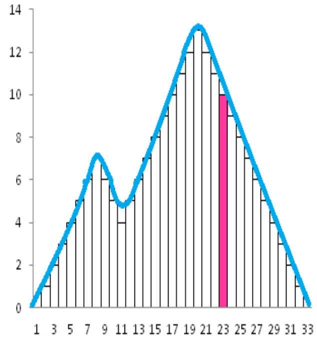
Se N → +∞, allora posso prendere un Δk → 0. Ottengo così una distribuzione quasi continua.

F_k = probabilità di avere misure nell'intervallo k.

$f_k = \frac{F_k}{\Delta k} = \frac{P_k}{\Delta k} = \frac{dP}{dx} = f(x) =$ probabilità infinitesima.

Sono così passato alla funzione continua, che diventa la **funzione densità di probabilità**.

Barbara Ranghetti 2013



Area fucsia = $f_k \Delta k = F_k \Rightarrow f(x)dx = dP$

La probabilità di avere misure di x tra a e b è: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dP$

Devono valere le seguenti proprietà:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (condizione di normalizzazione)

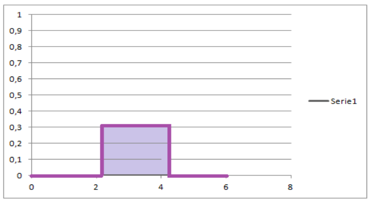
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $f(x) \geq 0$

Se conosco la funzione densità di probabilità (f.d.p.) posso calcolare:

valore medio: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$

varianza: $\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$

funzione di densità uniforme



$$u(x) = \begin{cases} c & a < x < b \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

$$A = (b-a) \cdot c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

c non è una costante qualunque.

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

$$\bar{x} = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{b-a} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow \sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

11 marzo 2013

Funzione di Gauss

Caratteristiche della funzione densità di probabilità:
1) simmetrica rispetto al valore vero X della grandezza.
2) decrescente all'aumentare dello scarto, preso in valore assoluto.
3) normalizzata, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Cerco una forma analitica precisa:

$G(x, X, \sigma) = \exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2} \right)$. per soddisfare la condizione di normalizzazione

de $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

Barbara Ranghetti 2013

$$G(x,X,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$\Rightarrow$

La funzione di Gauss è una f.d.p?

- $G(x-X)=G(X-x)$, è simmetrica!
- $\lim\limits_{(x-X)\to\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}\right)=0$ e $G'(x)\begin{cases}>0 & x<X\\ <0 & x>X\end{cases}$ $\Rightarrow$ decrescente!

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ $\Rightarrow$ questo integrale si risolve nel piano complesso, ma conoscendo questo risultato si possono ricondurre tutti gli altri integrali in questa forma.

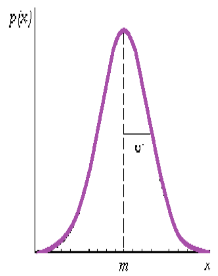
Ex: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-z^2}{2}}dz$, faccio un cambio di variabile: $z'=\frac{z}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $dz=\sqrt{2}dz'$

$\int e^{-z'^2}\sqrt{2}dz'=\sqrt{2\pi}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\sigma\sqrt{2\pi}$ quindi moltiplicando per $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ risulta normalizzata!

Graficamente:

G(x) è massima per x=X:



$$G'(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{-2(x-X)}{2\sigma^2}\right)\exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}\right)=0\Leftrightarrow x=X$$

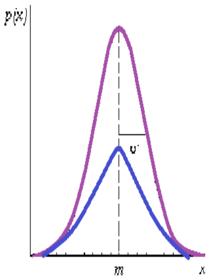
$$G''(x)=0\Leftrightarrow x=X\pm\sigma$$

$$G(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$G(X+\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\approx 60\% G(x)$$

 σ = semampiezza della funzione al 60% rispetto al massimo.

G(x) e σ sono inversamente proporzionali: al raddoppiarsi di uno si dimezza l’altro.



Media:

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)dx=\int x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

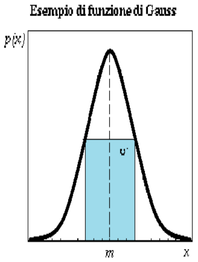
$$z=\frac{x-X}{\sigma}\rightarrow dx=\sigma dz$$

$$\int(\sigma\cdot z+X)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=$$

$$=\int\sigma\cdot z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz+\int X\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{X}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=X$$

Funzione dispari = 0

$$\sigma_x^2=\int(x-\bar{x})^2G(x)dx=\int(x-\bar{x})^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\sigma^2$$



l’area in azzurro rappresenta il 68% dell’area totale, cioè c’è il 68% di probabilità di avere un valore di x appartenente all’intervallo $\bar{x}-\sigma,\bar{x}+\sigma$.

Teorema del limite centrale

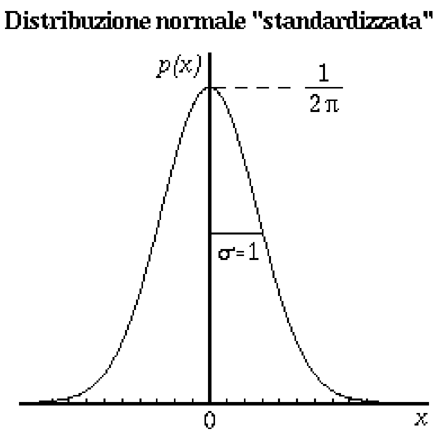
Date N variabili casuali indipendenti tra loro, $y_1, y_2, \dots, y_n$, con la f.d.p. di ciascuna non specificata, con media e varianza conosciuta (μ_i la media, σ_i^2 la varianza).

Se prendo la variabile casuale somma: $y = \sum_{i=1}^{N} y_i$, questa ha una f.d.p. che per N grande, è una gaussiana e si ha:

$\bar{y} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i$ e $\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$

La probabilità che $\bar{x} - \sigma < x < \bar{x} + \sigma$ è del 68%.
La probabilità che $\bar{x} - 2\sigma < x < \bar{x} + 2\sigma$ è del 95%.
La probabilità che $x < \bar{x} - \sigma \wedge x > \bar{x} + \sigma$ è del 32%.

Funzione di Gauss standardizzata



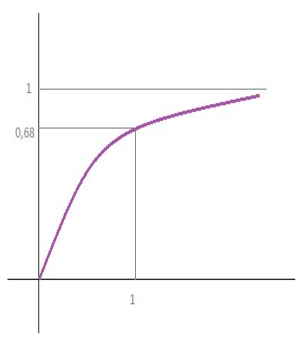
E’ una funzione di Gauss in cui X=0 e σ=1.

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Se prendo $z = \frac{x - X}{\sigma}$ passo da G(x) a G(z).
Questo è particolarmente comodo per conoscere il valore dell’integrale sotto la curva.

Funzione degli errori = $erf(t) = \int_{-t}^{+t} G(z)dz$

$erf(0) = 0$, $erf(1) = 0{,}68$, $erf(\infty) = 1$



Ex: X=5, σ=0,3
?= probabilità che x<4,6

$$t = \frac{x - X}{\sigma} = \frac{4{,}6 - 5}{0{,}3} = -1{,}33$$

Cerco l’area della gaussiana se σ=1,33 □ 81,65%.

$$\frac{1 - 0{,}8165}{2} = 9{,}8\%$$

Se conosco la f.d.p. di una grandezza dal punto di vista analitico, e ho N misure della grandezza, come trovo la miglior stima dei parametri in modo che la funzione sia quella che meglio descrive i dati?
Devo trovare la funzione che ha la maggiore probabilità in corrispondenza di quei parametri.

Principio di massima verisimiglianza

Sia f.d.p. per la grandezza X, che dipende da un insieme di parametri φ di valore sconosciuto. Disponiamo di N osservazioni di X, indipendenti, allora:

$$L(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\varphi)\cdot f(x_2,\varphi)\dots f(x_n,\varphi)$$.

La miglior stima di φ è ottenuta da quelle che rendono massima la funzione L.

$$\frac{dL}{d\varphi} = 0 \rightarrow \varphi^* \quad \text{e} \quad \frac{d^2L}{d\varphi^2} < 0$$.

$$\tilde{L} = \ln L \rightarrow \frac{d(\ln L)}{d\varphi} = 0 \rightarrow \varphi^*$$

Applichiamo il teorema alla gaussiana per dimostrare che $\bar{x}$ è la migliore stima in caso di errori solo casuali.

Se ho N osservazioni $\{x_i\}_{i=1,N}$, la probabilità di aver osservato x_1 è:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}\right) \Rightarrow L = \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x_i-X)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N}\ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x_i-X)^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \sum_{i=1}^{N}\left\{\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \ln\left(\exp\left(\frac{-(x_i-X)^2}{2\sigma^2}\right)\right)\right\} =$$

$$= N\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-X)^2}{2\sigma^2} = \tilde{L}$$

$$\frac{d\tilde{L}}{dx} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2\sigma^2}2(x_i-X) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}(x_i-X) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}x_i - NX = 0 \Rightarrow X = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N} = \bar{x}$$

Date N misure indipendenti affette da errori casuali, la miglior stima del valore vero è la media aritmetica.
Analogamente si dimostra che:

$$\frac{dL}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-X)^2}{N}$$

13 marzo 2013

Propagazione degli errori

1) formula generale per funzioni in una variabile
2) formula generale per funzioni in più variabili

Se ho una funzione $y = f(x)$ derivabile in $\bar{x}$, allora:

$$y = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2$$

sviluppo di Taylor

La propagazione degli errori serve per conoscere a priori l'incertezza, senza dover ripetere le misure.

Mi chiedo quale sia la miglior stima di $\bar{y}$ e σ_y. Se $(x_i - \bar{x})$ sono piccole:

$$\forall i \rightarrow y_i = f(x_i) \cong f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{\sum f(x_i)}{N} = \frac{\sum f(\bar{x})}{N} + \frac{f'(\bar{x})}{N} \sum (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{N} N \cdot f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{N} = \frac{\sum \left[f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) - f(\bar{x}) \right]^2}{N} = \frac{1}{N} [f'(\bar{x})]^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 = [f'(\bar{x})]^2 \sigma_x^2$$

$$\sigma_y = |f'(\bar{x})| \cdot \sigma_x$$

In generale: $y = kx^{\alpha}$

$$f'(x) = k \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} \Rightarrow \frac{f'(x)}{y} = k \cdot \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{k \cdot x^{\alpha}} = \alpha \frac{1}{x} \Rightarrow \sigma_y = |f'(x)| \sigma_x$$

$$\frac{\sigma_y}{y} = |\alpha| \frac{\sigma_x}{x}$$

Caso di più variabili: $z = f(x, y)$ derivabile nell'intorno di $\bar{x}, \bar{y}$, N volte, e siano $\forall i \rightarrow (x_i - \bar{x}), (y_i - \bar{y})$ piccoli.

$$z_i = f(x_i, y_i) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + f'(\bar{y})(y_i - \bar{y})$$ dove $f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}, f'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{N} = \frac{\sum f(x_i, y_i)}{N} \cong \frac{\sum \left[f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} (y_i - \bar{y}) \right]}{N} \cong$$

$$\cong f(\bar{x}, \bar{y}) \frac{N}{N} + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \sum (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \sum (y_i - \bar{y}) \cong f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{N} \cong \frac{\sum \left[f(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}(y_i - \bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y}) \right]^2}{N} \cong$$

$$\cong \frac{\sum \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(x_i - \bar{x}) \right]^2}{N} + 2\frac{\sum \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]}{N} + \frac{\sum \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}(y_i - \bar{y}) \right]^2}{N} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right) \sigma_{xy}$$

Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{\sum \left(x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \cdot \bar{y} \right)}{N} =$$

$$\frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{y} \frac{\sum x_i}{N} - \bar{x} \frac{\sum y_i}{N} + \frac{N \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{N} = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{y} = (\overline{xy}) - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

A differenza della varianza che è sempre positiva, la covarianza può essere anche negativa.
Se gli errori sono indipendenti e casuali, ho una somma di termini in cui il prodotto ha segno che varia e possono annullarsi a vicenda.
Se gli scarti sono indipendenti e per N grande si ha:

$\sigma_{xy} = 0$, $\bar{z} = f(\bar{x},\bar{y})$, $\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right)^2 \sigma_y^2$

Caso in cui $f(x,y) = z = k \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{\sigma_z}{z} \right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = k \cdot y^{\beta} \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = k \cdot x^{\alpha} \beta \cdot y^{\beta - 1}$.

Ex: $\alpha = 1, \beta = 1 \rightarrow z = k \cdot x \cdot y$

$$\left(\frac{\sigma_z}{z} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2$$

$\left(\frac{\sigma_z}{z} \right) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2}$ $\Rightarrow$ sommo in quadratura gli errori relativi.

Ex: $g = (2\pi)^2 \frac{L}{T^2} = (2\pi)^2 L T^{-2}$ $\Rightarrow$ pendolo

L e T indipendenti. $\alpha = 1, \beta = -2$

Barbara Ranghetti 2013

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)}$$

Caso in cui z = combinazione lineare: $z = ax + by$

$\frac{\partial z}{\partial x} = a \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = b \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$

$\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + \left(2ab \cdot \sigma_{xy}\right) \Rightarrow \sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$

Se sono indipendenti la covarianza è uguale a 0.

Se $a = 1, b = 1 \Rightarrow \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

Si può prendere una gaussiana G(z) con valore centrale $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ e $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

La deviazione standard della media è stata definita come: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$, giustifichiamolo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \Rightarrow z = \bar{x} = f(x_1, \ldots, x_N) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$ (funzione lineare)

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_N}\right)^2 \sigma_{x_N}^2 = \frac{1}{N^2}\sigma_{x_1}^2 + \ldots + \frac{1}{N^2}\sigma_{x_N}^2 = N\frac{1}{N^2}\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

15 marzo 2013

Se x, y, z, v sono errori casuali indipendenti:

$$\omega = f(x, y, z, v) \rightarrow \overline{\omega} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v}) \rightarrow \sigma_\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2}$$

Possiamo trovare un limite superiore a σ_z utilizzando la disuguaglianza di Schwartz:

$$\left|\sigma_{xy}\right| \le \sigma_x \cdot \sigma_y \Rightarrow \sigma_z^2 \le \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2\right| + \left|2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_{xy}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_z^2 \le \left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\sigma_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\sigma_y\right]^2 \Rightarrow \sigma_z \le \left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\sigma_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\sigma_y\right]$$

Ex: $c = \lambda \cdot \nu$, ?= con che precisione devo misurare λ di un emettitore che vibra a ν= 500 Hz ± 2Hz, se voglio conoscere c con una precisione dello 0,5%?
Ipotizzo che le misure siano indipendenti, gli errori casuali e che posso descriverle con una Gaussiana.

$\frac{\sigma_\nu}{\nu} = \frac{2}{500} = 0{,}4\%$, $\frac{\sigma_c}{c} = 0{,}5\%$

$$\left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sigma_\lambda}{\lambda} = 0{,}3\%$$

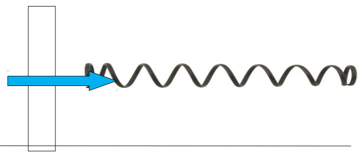
Quanto bene conosco σ_x ?

errore assoluto sulla deviazione standard : $\sigma_{\sigma_x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2(N-1)}}$

errore relativo sulla deviazione standard : $\sigma_{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}$

L'INTERPOLAZIONE

Ex: ho una molla (k), con un estremo fissato, e che tiro con una forza F.



$x = l - l_0$

F se non conosco k posso ricavarlo con due metodi:

- $k = F/x$
- aumento la forza e misuro gli allungamenti.

Se vale la legge di Hooke devo aspettarmi di avere un grafico come quello riportato sopra, per cui c'è una relazione lineare tra F e x.
Dopo aver ripetuto molte misure, posso ottenere un grafico come il seguente, e mi chiedo quale sia la retta che meglio interpreta la distribuzione di questi punti:

Se $y = A + Bx$, quale è la miglior stima di A e B che posso ottenere dalle N misure di x e y?

In generale: $y = f(x, \alpha)$, $\{x_i, y_i\}_{i=1,N}$, $\alpha = ?$
Ipotizzo che le incertezze di x siano trascurabili e che le incertezze di y siano σ_{y_i}
Posso rappresentare l'errore nel grafico come delle sbarrette verticali:

Metodo dei minimi quadrati: determino A e B minimizzando la somma quadratica delle dei punti dalla retta.

$$\left(y_i - f(x_i)\right)^2 = (y_i - A - Bx_i)^2$$

Se le misure di y sono affette solo da errori casuali allora questo principio è la conseguenza dell'applicazione del principio di massima verosimiglianza.

La f.d.p. di osservare il valore y_i è una gaussiana con Y_i come valore medio e varianza σ_{y_i}.

$$Y_i = A + Bx_i \Rightarrow G(y_i) = \frac{1}{\sigma_{y_i}\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(y_i - Y_i)^2}{2\sigma_{y_i}^2}\right) = \frac{1}{\sigma_{y_i}\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(y_i - A - Bx_i)^2}{2\sigma_{y_i}^2}\right)$$

$$L(y_1,\dots, y_n) = \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{y_i}\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(y_i - A - Bx_i)^2}{2\sigma_{y_i}^2}\right) = \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{y_i}\sqrt{2\pi}}\cdot\prod_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{-(y_i - A - Bx_i)^2}{2\sigma_{y_i}^2}\right)$$

$$\ln(L) = \sum_{i=1}^{N}\left\{\ln\frac{1}{\sigma_{y_i}\sqrt{2\pi}} - \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{2\sigma_{y_i}^2}\right\}$$

La miglior stima di A e B è quella che rende massima $\sum\frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_{y_i}^2}$.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{d_i^2}{\sigma_{y_i}^2}$$ dove $d_i^2 = (y_i - A - Bx_i)^2$.

Matematicamente:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\chi^2}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial\chi^2}{\partial B} = 0\end{cases} \quad \begin{matrix} A = A^* \\ B = B^* \end{matrix}$$

$$\chi^2 = \sum\frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} \Rightarrow \frac{\partial\chi^2}{\partial A} = \sum\frac{1}{\sigma_{y_i}^2}2(y_i - A - Bx_i)(-1) = -2\left[\sum\frac{y_i}{\sigma_{y_i}^2} - \sum\frac{A}{\sigma_{y_i}^2} - \sum\frac{Bx_i}{\sigma_{y_i}^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\chi^2}{\partial B} = \sum\frac{1}{\sigma_{y_i}^2}2(y_i - A - Bx_i)(-x_i)$$

Ipotizziamo che $\forall i \rightarrow \sigma_{y_i} = \sigma_y$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\chi^2}{\partial A} = 0 \Leftrightarrow \sum y_i - AN - B\sum x_i = 0 \\ \dfrac{\partial\chi^2}{\partial B} = 0 \Leftrightarrow \sum y_i\cdot x_i - A\sum x_i - B\sum x_i = 0\end{cases}$$

18 marzo 2013

Chiamato $\Delta = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$ si ha che:

$$A^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\Delta}$$

$$B^* = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\Delta}$$

Se gli errori sulle y sono tutti uguali, A e B non dipendono da σ_y.

Quale è l'incertezza su A e B (σ_A, σ_B)?

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial A}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2$$ dove $$\left(\frac{\partial A}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{\Delta}\left\{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) x_j\right\}$$

$$\sigma_A^2 = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial y_j}\right)^2 \sigma_{y_j}^2 = \sigma_y^2 \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial y_j}\right)^2 = \sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta} \Rightarrow \sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B^2 = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial B}{\partial y_j}\right)^2 \sigma_{y_j}^2 = \ldots \Rightarrow \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Covarianza: $\sigma_{AB} = -\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{\Delta}\sigma_y^2$

A e B NON sono indipendenti, in quanto sono funzione di $\{x_i, y_i\}$, quindi la covarianza NON è nulla.

Estrapolazione

Ho N misure $\{x_i, y_i\}$, ho misurato dei dati e costruito la retta $y = A + Bx \rightarrow A^*, B^*, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_{AB}$.

Valore non misurato, ma estrapolat0 (cioè ricavato dalla retta $y_0 = A^* + B^* x_0$).

Quale è l'incertezza con cui determino y_0?

Utilizzo la propagazione degli errori, ipotizzando che gli errori su x_0 siano trascurabili.

$$y_0 = A + Bx_0$$

$$\sigma_{y_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial y_0}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 + 2\left(\frac{\partial y_0}{\partial A}\right)\left(\frac{\partial y_0}{\partial B}\right)\sigma_{AB}}$$

$$\left(\frac{\partial y_0}{\partial A}\right) = 1 \vee \left(\frac{\partial y_0}{\partial B}\right) = x_0$$

$$\Rightarrow \sigma_{y_0} = \sqrt{\sigma_A^2 + x_0^2\sigma_B^2 + 2x_0\sigma_{AB}}$$

Il valore estrapolato ha un errore maggiore.

Minimi quadrati pesati

Le incertezze sulla y sono diverse tra loro:

$$\sum \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

 A e B dipendono anche da $\{\sigma_{y_i}\}$.

$$A = \frac{\sum \frac{y_i}{\sigma_{y_i}^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2}\right)^2}$$

con

$$\Delta' = \sum \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2}\right)^2 \Rightarrow \sigma_A = \sqrt{\frac{\sum \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}}{\Delta'}}$$

Caso particolare: retta vincolata a passare per l'origine degli assi.

$y = mx$, $\{x_i, y_i\}_{i=1,N}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - f(x_i)]^2}{\sigma_{y_i}^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - mx_i]^2}{\sigma_{y_i}^2} = \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N} [y_i - mx_i]^2$$

, $\forall \sigma_{y_i} = \sigma_y$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - mx_i)(-x_i) = \frac{1}{\sigma_y^2} \left\{ \sum_{i=1}^{N} (-2x_i y_i) + 2mx_i^2 \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - m \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

$$\sigma_m^2 = \left(\frac{\partial m}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial m}{\partial y_N}\right)^2 \sigma_{y_N}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial m}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^2$$

$$\frac{\partial m}{\partial y_1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} x_1$$

(…)

$$\sigma_m = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}}$$

Riassumendo:

Ipotesi: $y = f(x,\alpha)$ con $\begin{cases} \alpha = parametri \\ \alpha = \{A, B\} \\ \alpha = \{m\} \end{cases}$

Minima distanza sommata su tutti i punti = $\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - f(x_i,\alpha)]^2}{\sigma_{y_i}^2}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha *$$

Ex: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ dove $Q(t) = y \wedge t = x$

$\ln Q(t) = \ln e^{-\frac{t}{RC}} + \ln Q_0 = -\frac{t}{RC} + \ln Q_0 \Rightarrow \begin{cases} y = \ln Q \\ x = t \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{x}{RC} + \ln Q_0$ dove $\begin{cases} A = \ln Q_0 \\ B = -\frac{1}{RC} \end{cases}$

$\Rightarrow y = A + Bx$

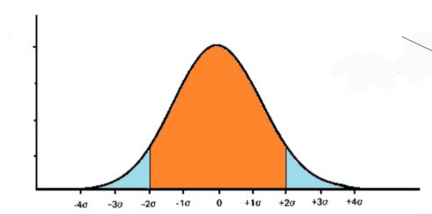
$\{t_i, Q_i\} \rightarrow Q_0, RC \rightarrow A, B \Rightarrow \begin{cases} Q_0 = e^A \\ RC = -\frac{1}{B} \end{cases}$.

20 marzo 2013

Intervalli di confidenza (confidence levels)

Data $G(x, X, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2} \right)$

Intervallo di confidenza = $\int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G(x, X, \sigma)dx =$ 68% = probabilità di avere $X - \sigma < x < X + \sigma$.



Confidence level

α X+d

Se conosco d:

d	Confidence level	α =1-CL
1 σ	0,6827	0,3173
2 σ	0,9545	0,0455
3 σ	0,9973	0,0027

Se conosco CL:

d	Confidence level	α =1-CL
1,64σ	0,90	0,10
1,96σ	0,95	0,05

Questo serve per capire se le misure fatte sono compatibili con il valore prefissato.

Test sulla compatibilità tra una misura e un valore prefissato:

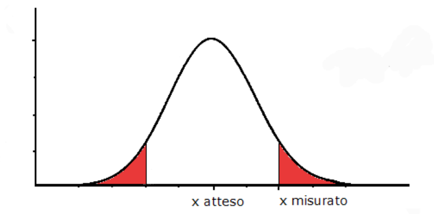
$x_{misurato}$ e x_{atteso}

Non posso dare una risposta assoluta perché la misura è affetta da errori. Ipotizzo allora che gli errori siano casuali e che siano rappresentabili tramite una distribuzione di Gauss.

Pongo $X = x_{atteso}$.

Quale è la probabilità di trovare una x distante da x_{atteso} tanto quanto $x_{misurato}$? Quante σ dista dal valore atteso?

$$\frac{|x_{atteso} - x_{misurato}|}{\sigma} = t$$



Ex:

$$x_m = x_a + 2\sigma, \quad t = 2, \quad \alpha = 4{,}5\%$$

$$\Rightarrow 1 - \int_{x-t\sigma}^{x+t\sigma} G(x, X, \sigma)dx = \alpha$$

Barbara Ranghetti 2013

Adattamento di una funzione f a un insieme di misure $\{x_i, y_i\}_{i=1,N}$

Quanto bene la mia funzione si adatta a un insieme di misure?

1. Miglior stima dei parametri della funzione $y = f(x,\alpha) \to \frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha} = 0 \to \alpha^*$
2. Quanto è buono l'adattamento? Devo trovare la probabilità che l'adattamento sia soddisfacente a partire dalle ipotesi che faccio.

Se l'adattamento non è buono:
- o la funzione non è una retta;
- o gli errori non sono così piccoli.

L'adattamento si valuta in termini statistici con il test del χ^2:

$$hp: \begin{cases} y = A + Bx \\ \{x_i, y_i\}_{i=1,N} \\ \sigma_{y_i} \to Gauss \end{cases}$$

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A^* \\ B^* \end{matrix}$$

$$\chi^2_{osservato} = \chi^2(A^*, B^*)$$

$$\chi^2_{osservato} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - A^* - B^* x_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} \approx N(?)$$

Quanto è piccolo?

Funzione densità di probabilità del χ^2

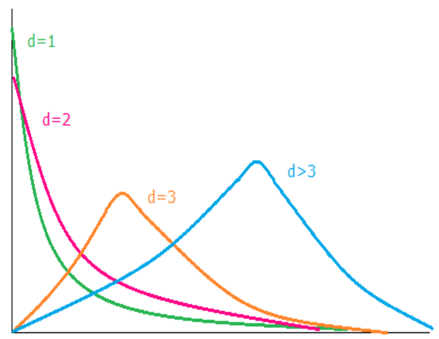
Date d variabili casuali, indipendenti, ciascuna con funzione densità di probabilità di Gauss, con media μ_i e varianza σ_i^2.

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{d} (x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \geq 0$$

 somma quadratica di scarti standardizzati.

$P_d\left(\chi^2\right)=k_d\left(\chi^2\right)^{\frac{d}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}$ dove d = numero di gradi di libertà.

$P_d\left(\chi^2\right)$



$$k_d=\int_0^\infty P_d(\chi^2)d\chi^2=1$$

$$k_d=\frac{1}{2^{d/2}\gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

χ^2

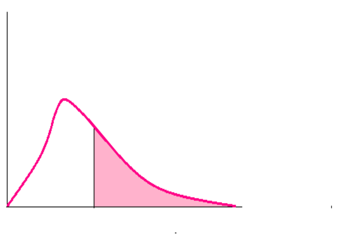
$$\left(\overline{\chi}^2\right)=\int\chi^2P\left(\chi^2\right)d\chi^2=d\Rightarrow\sigma^2_{\chi^2}=2d$$

$$\tilde{\chi}^2=\frac{\chi^2}{d}=\chi^2\quad ridotto$$

$\tilde{\chi}^2=1$

Quale è la probabilità di trovare $\chi^2\geq\chi^2_{oss}$?

$P_d\left(\chi^2\right)$



$\int_{\chi^2_{oss}}^\infty P_d\left(\chi^2\right)d\chi^2$ questo valore è solitamente riportato in una tabella, sul libro di statistica.

χ^2

Fisso ε piccolo a piacere (ex: ε=5%). Se $P(\chi^2\geq\chi^2_{oss},d)\geq\varepsilon$ allora il mio valore di χ^2_{oss} è accettabile = accetto l'ipotesi fatta (cioè il valore di χ^2_{oss} è uno dei valori plausibili per la somma degli scarti standardizzati su variabili casuali indipendenti):

Ho N misure indipendenti $\{x_i,y_i\}_{i=1,N}$, gli errori sulle x sono trascurabili.

$y = A + Bx$ descrive le mie misure.

Ho determinato A* e B* a partire dalle misure. Confronto $y = A^* + B^* x$ con $\{x_i, y_i\}_{i=1,N}$. Calcolo $\chi^2_{osservato} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - A^* - B^* x_i)^2}{\sigma^2_{y_i}}$.

Quanto vale d? d = N-2 = numero di gradi di libertà. $\left.\begin{array}{l} A^* = f(x_i, y_i) \\ B^* = f(x_i, y_i) \end{array}\right\} N-2$ variabili indipendenti.

Mi aspetto che se la retta interpreta bene i punti, valgono le ipotesi $\chi^2_{oss} \approx d, \quad \tilde{\chi}^2_{oss} \approx 1$.

Stima a posteriori delle incertezze sulle y_i

$$hp: \begin{array}{l} \{x_i, y_i\}_{i=1,N} \\ \forall i \quad \sigma_{y_i} = \sigma_y \end{array}$$

A e B si ottengono dalle x_i, y_i e non dipendono dalle incertezze σ_y.

Supponiamo che le σ_y siano tutte uguali.

Prendo per valida, come funzione rappresentativa delle mie misure, $y = A + Bx$.

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - A^* - B^* x_i)^2}{\sigma^2_y} \approx N-2$$

Stimo σ_y come: $\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} y_i - A^* - B^* x_i}{N-2}}$

22 marzo 2013

La media pesata

La misura di una stessa grandezza è ottenuta tramite metodi differenti, con precisioni diverse.

$\left.\begin{array}{l} x_A \to \sigma_A \\ x_B \to \sigma_B \end{array}\right\}$ misure **indipendenti** della stessa grandezza x.

Qual è la miglior stima del valore vero di x? applichiamo il principio di verisimiglianza.

$$G(x_A, X, \sigma_A) = \frac{1}{\sigma_A\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_A - X)^2}{2\sigma_A^2}\right) \wedge \quad G(x_B, X, \sigma_B) = \frac{1}{\sigma_B\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_B - X)^2}{2\sigma_B^2}\right)$$

$$L(x_A, x_B, X, \sigma_A, \sigma_B) = \frac{1}{\sigma_A\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_A - X)^2}{2\sigma_A^2}\right) \times \frac{1}{\sigma_B\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_B - X)^2}{2\sigma_B^2}\right)$$

$$\ln L = \tilde{L} = \ln\left(\frac{1}{\sigma_A\sigma_B 2\pi}\right) + \ln\left[\exp\left(-\frac{(x_A - X)^2}{2\sigma_A^2} - \frac{(x_B - X)^2}{2\sigma_B^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial X} = \frac{\partial\left(\frac{(x_A - X)^2}{2\sigma_A^2} + \frac{(x_B - X)^2}{2\sigma_B^2}\right)}{\partial X} = \frac{2(x_A - X)}{2\sigma_A^2} + \frac{2(x_B - X)}{2\sigma_B^2} = \sigma_B^2 x_A - \sigma_B^2 X + \sigma_A^2 x_B - \sigma_A^2 X = 0$$

$$\Leftrightarrow X_{best} = \frac{\sigma_B^2 x_A + \sigma_A^2 x_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \times \frac{\sigma_B^2\sigma_A^2}{\sigma_B^2\sigma_A^2} = \frac{\left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2}\right)}{\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}}$$

Peso della misura A: $P_A = \frac{1}{\sigma_A^2}$, peso della misura B: $P_B = \frac{1}{\sigma_B^2}$

$$\Rightarrow X_{best} = \frac{P_A x_A + P_B x_B}{P_A + P_B}$$

Se $P_A = P_B \Rightarrow X_{best} = \frac{x_A + x_B}{2} = \bar{x}$

Se ho N misure **indipendenti** con varianze diverse: $X_{best} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$

Quale è l'incertezza della migliore stima?

$$\left(\frac{\partial X_{best}}{\partial x_A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial X_{best}}{\partial x_B}\right)^2 \sigma_B^2 = \sigma_{X_{best}}^2 = \left(\frac{\frac{1}{\sigma_A^2}}{\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\frac{1}{\sigma_B^2}}{\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}}\right)^2 \sigma_B^2 \Rightarrow \sigma_{X_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' DI BERNOULLI E DI POISSON

Se la variabile non è continua, ma corrisponde a valori discreti, come i numeri interi, allora la funzione diventa una "distribuzione" e la rappresentazione grafica avviene tramite istogramma a sbarre.

Distribuzione di Bernoulli (o Binomiale)

Fenomeno descritto da una distribuzione binomiale:

- Un numero n fissato e finito di prove ripetute identiche;
- Ciascuna prova ha solo due possobili risultati: successo o insuccesso;
- La probabilità di verificarsi di un successo, a ogni prova, è la stessa (costante) = p (q=p-1 è la probabilità di insuccesso).

Qual è la probabilità di ottenere ν successi in n prove (essendo p la probabilità di successo per una prova)? $0 \le \nu \le n$

$B_{n,p}(\nu) = ?$

Ex: quando lancio una moneta ho due possibilità: testa (T) o croce (C).

$$hp: \begin{array}{l} n = 4 \\ p = 0,5 \end{array}$$

?= probabilità di successo su quattro lanci.

$$B(3): \begin{array}{cccc} T & T & T & C \\ T & T & C & T \\ T & C & T & T \\ C & T & T & T \end{array} \Rightarrow B(3) = 4\left[(1-0,5)(0,5)(0,5)(0,5)\right] = 4(0,5)^4 = 0,25$$

$$B(2) = \begin{array}{cccc} T & T & C & C \\ T & C & C & T \\ C & T & C & T \\ T & C & T & C \\ C & T & T & C \\ C & C & T & T \end{array} \Rightarrow B(2) = 6(0,5)^4 = 0,375$$

$B(1) = B(3) = 0,25$

$B(0) = B(4) = 0,0625$

$B(\nu)\%$

ν

0 1 2 3 4

Caso generale: $\boxed{}$

$\frac{(n)!}{(\nu)!\cdot(n-\nu)!}=\binom{n}{\nu}$ coefficiente binomiale.

Affinchè $B(\nu)$ sia una distribuzione densità di probabilità, deve essere normalizzata: $\sum_{i=0}^{n} B_{n,p}(\nu)=1$?

$$\sum B_{n,p}(\nu)=\frac{(n)!}{(\nu)!\cdot(n-\nu)!}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}=(p+q)^n=(p+1-p)^n=1^n=1$$ ok!

$$\bar{\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}\nu\cdot B(\nu)=np \quad \sigma_\nu=\sqrt{npq}=\sqrt{np(1-p)}$$

N.B: se $p=1/2$ allora la distribuzione binomiale è simmetrica.

Per n ∞ la distribuzione binomiale si approssima bene alla distribuzione di Gauss con $\bar{x}=\bar{\nu}$ e $\sigma^2=np(1-p)$.

Distribuzione di Poisson

Fenomeno raro con media attesa definita:

- Evento che si ripete un numero di volte NON fissato a priori;
- Ha frequenza assoluta media (μ) costante in un dato intervallo (di tempo, di spazio, ecc).

Quale è la probabilità che in un intervallo si verifichino esattamente ν eventi, quando conosco la frequenza media μ?

$P_\mu(\nu)$

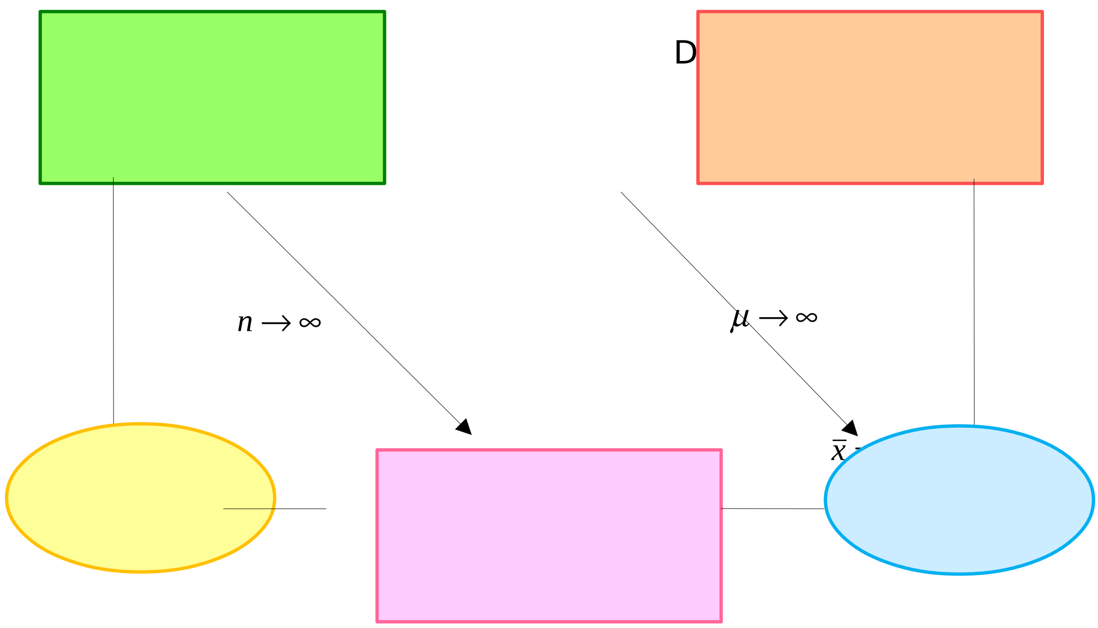
ν

Proprietà della distribuzione di poisson:

- Normalizzata: la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\mu(\nu)=1$, infatti: $$\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-\mu}\left(\frac{\mu^\nu}{(\nu)!}\right)=e^{-\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\mu^\nu}{(\nu)!}\right)=e^{-\mu}e^{\mu}=1$$
- $\bar{\nu}=\mu$
- $\sigma_\nu^2=\mu\Rightarrow\sigma_\nu=\sqrt{\mu}$

- $$\frac{\sigma_\nu}{\bar{\nu}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$
- $$P(0) = e^{-1}$$
  $$P(1) = \mu \cdot e^{-1} = \mu P(0)$$
  $$p(2) = \frac{e^{-1}\mu^2}{2} = \frac{\mu}{2}P(1)$$
  $$p(3) = \frac{\mu}{3}P(2)$$
  $$\Rightarrow P(\nu) = \frac{\mu}{\nu}P(\nu - 1)$$
- Se µ è intero: $P_\mu(\mu) = \frac{\mu}{\mu}P(\mu - 1) = P(\mu - 1)$ quindi μ e $\mu - 1$ sono **equiprobabili**.
- Se $\mu < 1$ il valore più probabile è sempre 0:
  $$P_\mu(\nu) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^\nu}{(\nu)!} \leq e^{-\mu} = P(0)$$
- Per n ∞ la distribuzione di Poisson è ben approssimata da una funzione di Gauss in cui $\bar{x} = \mu \quad \sigma^2 = \mu$.

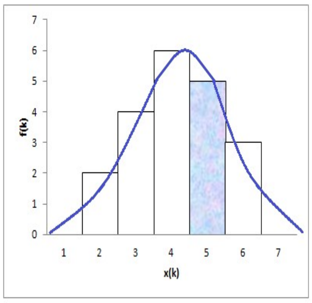
Riassumendo:



25 marzo 2013

Confronto tra istogramma e funzione

- Se la x è continua la sua funzione densità di probabilità è una gaussiana. Dobbiamo disegnare la gaussiana sopra l'istogramma e vediamo quanto bene descrive l'insieme delle misure.



σ_{E_k}

$$P_k = \int_{a_k}^{b_k} G(x)dx$$

$$E_k = N \cdot P_k$$

$$\sigma_{E_k} \cong \sqrt{E_k} = \sqrt{N \cdot P_k}$$

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{M}(O_k - E_k)^2}{\sigma_{E_k}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{M}(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

E_k

$$\chi_{oss}^2 \approx d, \quad d = M - v$$

Dove d sono i gradi di libertà e v i vincoli:
- se i parametri della funzione con cui confronto sono noti, ma uso n nel calcolo degli E_k, allora v=1.
- se uso una gaussiana definita da $\bar{x}$ e σ calcolati sui valori usati nell'istogramma, v aumenta di due e allora v=3.

$\Rightarrow \chi_{oss}^2 \approx M - v$ se non vale questo l'accordo non è buono.

$P_0 = P\left(\chi^2 > \chi_{oss}^2, d\right)$

Se P_0>5% allora l'accordo è accettabile.

- Se la x è discreta la distribuzione di probabilità da utilizzare è la distribuzione Binomiale o quella di Poisson.